Μαθημα 18ο 11/5/2017

Τοπολογια

→ $S \neq \emptyset$, $S \subseteq (E, \rho)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_i$

$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subseteq E$

→ E απειρο

$\rho_\delta = \rho$ (E, ρ_δ)

$\delta(E) = 1$ (E, ρ) δεν ειναι ολικα φραγμενος

Αποδειξη

Εστω οτι ειναι ολ. φραγμενο $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$

$\exists x_1, \dots, x_n : E = \bigcup_{i=1}^{n} B_E(x_i, \varepsilon)$

$\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \exists n, \exists x_i$

$E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ $\{x_1, \dots, x_n\}$ ατοπο

$B(x_i, 1) = \{y \in E : \rho_\delta(x_i, y) < 1 = \varepsilon\} = \{x_i\}$

Προταση (χ.Α)

$(E_1, \rho_1), \dots, (E_k, \rho_k)$ μ.χ

(E, ρ) καρτεσιανος μ.χ . Τ.Α.Ε.Ι

1. (E, ρ) ολ. φραγμενος

2. $\forall i$ (E_i, ρ_i) ολ. φραγμενο

Αποδειξη

(1) ⇒ (2) Θεωρουμε $f : (E = E_1 \times \dots \times E_k, \rho) \to E_1$

$f(\bar{x}) = f(\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{x_i \in E_i}) = x_1$

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$

$\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$

$\rho(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = \rho_1(x_1, y_1) \leq \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \rho_k^2(x_k, y_k)} = 1 \cdot \rho(\bar{x}, \bar{y})$

f Lipschitz με $L = 1$ Αν $f(E) = E_1$ $\Big\}$ ⇒ (E_1, ρ_1) ολ. φραγμ.

f ομοιομ. συν.

Πόρισμα (sos)

(E_i, ρ_i) μ.χ $i = 1, 2, \ldots, k$

$\emptyset \neq A_i \subseteq E_i$, $\forall i$

$A = A_1 \times \ldots \times A_k \subseteq (E_1 \times \ldots \times E_k = E, \rho)$

1. A ολ. φραγμ $\subseteq (E, \rho)$

2. $A_i \subseteq E_i$ ολ. φραγμ. $\forall i$

Αποδειξη

(2) $\Rightarrow$ (1) Εστω $A_i \subseteq E_i$ ολ. φραγμ.

$\Rightarrow$ $(A_i, \rho_i / A_i)$ μ.χ ειναι ολ. φραγμ.

$\xrightarrow[\text{προταση}]{\text{προηγ.}}$ $(A_1 \times \ldots \times A_k, \rho)$

ρ' καρτ. που προκυπτει απο την ρ_i / A_i

$\rho' = \rho / A_1 \times \ldots \times A_k$

$\Rightarrow$ $(A_1 \times \ldots \times A_k, \rho / A_1 \times \ldots \times A_k)$ ολ. φραγμ.

$\Rightarrow$ $A_1 \times \ldots \times A_k$ ολ. φραγμ $\subseteq (E, \rho)$

Σχόλιο

• ΘΔΟ (E, ρ) ολ. φραγμ $\Rightarrow$ φραγμ.

$(E, \rho) = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1 = \varepsilon)$, $\delta(B(x_i, \underset{r}{1})) \leq 2 \cdot r = 2 \cdot 1$

• $\underbrace{A \subseteq B}$, B φραγμ $\Rightarrow$ A φραγμ

διοτι $\delta(A) \leq \delta(B) < +\infty$

• Αν $A \neq \emptyset$ φραγμενο $\Rightarrow$ $\exists B(x_0, r)$

$A \subseteq B(x_0, r)$, $\emptyset \neq A$ φραγμ.

$x_0 \in A$, $r = 2\delta(A)$, $r' = \delta(A) + 1$

$\forall y \in A$: $\rho(y, x_0) \leq \delta(A) \leq 2\,\delta(A)$

$< 2\delta(A) + 1$

Αρα $\forall y \in A \Rightarrow y \in \underset{A \subseteq}{B}(x_0, \delta(A) + 1)$

Ασκηση

A, B φραγμενα $\subseteq (E, \rho) \Rightarrow A \cup B$

$\delta(A \cup B) \le \underbrace{\underbrace{\delta(A)}_{<+\infty} + \underbrace{\delta(B)}_{<+\infty}}_{\text{πεπερασμενοι αριθμοι}} + \underbrace{d(A,B)}_{<+\infty}$ → παντα πεπερασμενος σχετικα τι ειναι τα A, B

Προταση

$\emptyset \neq S \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

S ολ. φραγμ. $\subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow S$ φραγμ. $\Leftrightarrow \exists\, r > 0,\ x_0 \in \mathbb{R} : S \subseteq (x_0 - r, x_0 + r)$

Αποδειξη

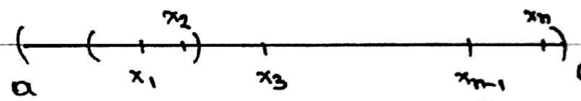
$(\Rightarrow)$ Ισχυει παντα σε καθε μ.χ

$(\Leftarrow)$ Οδο το (a, b) ειναι ολ. φραγμ. $\subseteq \mathbb{R}$

$\varepsilon > 0$ θα βρουμε $x_1, \ldots, x_{n-1} \in (a, b)$

$(a, b) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$ (1)

$B(x_i, \varepsilon) = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$



Ισχυει $x_1 - a < \varepsilon$

θεωρουμε ενα $n \in \mathbb{N}$

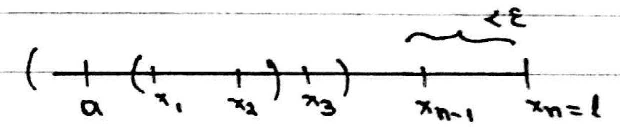
$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$

$x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}$ $\qquad |x_i - x_{i+1}| = \frac{b-a}{n} < \varepsilon$

↳ επιλογη

$\vdots \qquad \vdots$

$x_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}$



$x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$

Αρα $\Rightarrow$ η (1)

Προταση

$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^k$, τοτε το S ολ. φραγμ. $\subseteq \mathbb{R}^k \Leftrightarrow S$ φραγμ.

Αποδειξη

($\Rightarrow$) προφανες

($\Leftarrow$) S φραγμ $\subseteq (\mathbb{R}^k, \rho) \Rightarrow \exists\, \bar{x}_0 = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$

$\emptyset \neq S \subseteq B_{(\mathbb{R}^k, \rho)}(\bar{x}_0, r) = S_1$

Υποδειξη

Το $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ ολ. φραγμ. στο $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^2$ $\quad \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ολ. φραγμ.} \\ \mathbb{R}}}{(\alpha, \beta)} \times \underset{\text{ολ. φραγμ.}}{(\gamma, \delta)}}_{\text{ολ. φραγμ. στο } \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$

$S_1 \subseteq (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_k - r, x_k + r) \Rightarrow B_{\mathbb{R}^k}(\bar{x}_0, r)$ ολ. φραγμ. $\Rightarrow$
S ολ. φραγμ.

Ασκηση

$f : (E_1, \rho_1) \xrightarrow{\text{επι}} (E_2, \rho_2)$ συνεχης

(E_1, ρ_1) ολικα φραγμ. αλλα ο E_2 οχι ολ. φραγμ.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$

$f : \underbrace{(0,1]}_{(E_1, \rho_1)} \to \underbrace{[1, +\infty)}_{(E_2, \rho_2)}$ ειναι συνεχης και επι / οχι ομοιομ. συνεχης

$\to$ στο πεδιο ορισμου της δεν ειναι ομοιομ. συν.

$(0,1]$ ολ. φραγμ. $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ ο υποχωρος $((0,1], |\cdot|)$

$f((0,1]) = [1, +\infty)$ οχι φραγμ.

$\Rightarrow f(E_1) = E_2$ οχι ολ. φραγμ.

Scanned by CamScanner

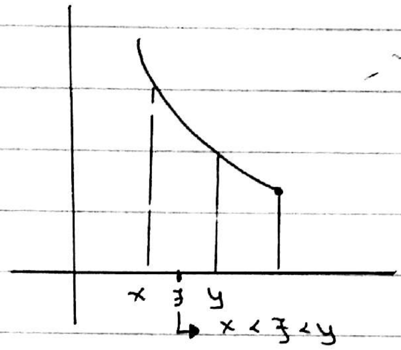
$\Rightarrow f : [1,+\infty) \to (0,1]$ ομοιομ. συνεχης στο $[1,+\infty)$

$x, y \in [1,+\infty)$, $x<y$

$f(x) = 1/x$

$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y|$ για καποιο $1 \leq x < \xi < y$

$\frac{1}{\xi^2} |x-y| \leq |x-y|$ Lipschitz άρα συνεχης



$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{\xi^2} |x-y| \geq \frac{|x-y|}{y^2}$

Βασικο Θεωρημα (χωρις αποδειξη)

Ο (E,ρ) ειναι ολ. φραγμ. $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$

$\exists$ βασικη υπακολουθια

πχ

$(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ Νδο ειναι ολ. φραγμενο

$x_n = 1/n$

$($ 0 —— x_1 —— x_2 —— $]$ 1

Εστω $(x_n) \subseteq (0,1]$ θα εγραφε

βασικη υπακολουθια $\Rightarrow \exists (x_{k_n})$ μονοτονη υπακολουθια

1. $x_{k_1} \leq x_{k_2} \leq \dots \leq x_{k_n} \leq \dots \leq 1$
2. $x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \dots \geq x_{k_n} \geq \dots \geq 0$

1 : $x_{k_n} \to x \leq 1$

2 : $x_{k_n} \to x' \geq 0$

Αρα το $(0,1]$ ειναι ολ. φραγμ.

πχ $[1,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$

δεν ειναι φραγμ.

$x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$

$(x_n)_n \subseteq [1,+\infty)$

Scanned by CamScanner

$k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Αν $(x_{k_n})_n$ βασική ακολουθία

$\exists\ k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ $\quad \varepsilon = 1/2 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$

$|x_{k_n} - x_{k_m}| < \frac{1}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$ (άτοπο)

$\left.\begin{array}{l} n = n_0 \\ m = n_0+1 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_{n_0} - x_{n_0+1}| \geq 1$

Άσκηση

$A, B \subseteq (E, \rho)$

A, B ολ. φραγμένα $\Rightarrow A \cap B,\ A \cup B$ ολ. φραγμ.

$A \cap B \subseteq A$, A ολικά φραγμ. $\Rightarrow A \cap B$ ολ. φραγμ.

Θέλω αν $\varepsilon > 0$, να βρω $(z_j)_{j=1}^{n}$: $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(z_j, \varepsilon)$

A ολικά φραγμ. $\Rightarrow \exists\ \underbrace{n}_{= n(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ (1) για $\varepsilon > 0$

B ολικά φραγμ. $\Rightarrow \exists\ m \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_n \in B$: $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(y_i, \varepsilon)$ (2)

Άρα θέτοντας $z_1 = x_1, \dots, z_n = x_n,\ z_{n+1} = y_1, \dots, z_{n+m} = y_m \in A \cup B$

από (1), (2) $\Rightarrow A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n+m} B(z_i, \varepsilon)$

$\rightarrow\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B(x_i, \varepsilon)$